

Datenanalyse + Wissenserwerb

Übungen Wahrscheinlichkeit 2

©2008, mit freundlicher Genehmigung des Urhebers, Antoine Hauck

Aufgabe 1

Vergleich zwischen Binomial- und Poisson-Verteilung. Ein fairer Würfel wird n mal geworfen. Wir definieren die Zufallsvariable X = "Anzahl der geworfenen Sechsen". Somit $X \sim \text{Bi}(n,p)$.

a.) Wie gross ist p ?

$$> p := 1/6;$$

$$p := \frac{1}{6} \quad (1.1)$$

b.) Skizzieren Sie für den Fall $X \sim \text{Bi}(n,p)$ und $X \sim \text{Po}(\lambda)$ die Verteilungsfunktionen $P_{\text{Binomial}}(X=k)$ und $P_{\text{Poisson}}(X=k)$.

$$\text{Bi}(X=k) = p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{Po}(X=k) = p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} \quad (\text{wobei gilt: } \lambda = np)$$

Nun kann man mit diesen zwei Formeln den Graphen skizzieren.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\right)_1 \\ & \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right] \\ & \frac{1}{6} \\ & \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ & \left(\frac{1}{6}\right)_1 \\ & 3e^{-3} = \frac{1}{6} n e^{-\frac{n}{6}} \\ & 3 = \frac{n}{6} \end{aligned} \quad (1.2)$$

c.) Wie gross wird der Fehler mit der Poisson-Verteilung bei $n=30$ und $k=6$?

$$> n := 30;$$

$$n := 30 \quad (1.3)$$

$$> k := 6;$$

$$k := 6 \quad (1.4)$$

$$> \text{lambda} := n * k;$$

$$\lambda := 180 \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{Bi}[6] := \text{binomial}(n, k) * (p^k) * (1-p)^{(n-k)} ; \\
 & \qquad \qquad \qquad Bi_6 := \frac{3932416439056396484375}{24563768857859261988864} \qquad (1.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{evalf}(\%); \\
 & \qquad \qquad \qquad 0.1600901092 \qquad (1.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{Po}[6] := ((n*p)^k/k!) * \exp(-n*p) ; \\
 & \qquad \qquad \qquad Po_6 := \frac{3125}{144} e^{-5} \qquad (1.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{evalf}(\%); \\
 & \qquad \qquad \qquad 0.1462228081 \qquad (1.9)
 \end{aligned}$$

Fehler:

$$\begin{aligned}
 &> \text{evalf}(\text{abs}(\text{Bi}[6] - \text{Po}[6])); \\
 & \qquad \qquad \qquad 0.0138673011 \qquad (1.10)
 \end{aligned}$$

▼ Aufgabe 2

> restart:

In einem Manuskript gibt es im Durchschnitt 3 Druckfehler pro Seite. Die Zufallsvariable X = "Anzahl Druckfehler pro Seite" kann somit mit eht guter Näherung als posson-verteilt betrachtet werden.

a.) Weshalb ist die Poisson-Verteilung eine vernünftige Annahme?

b.) Wie gross ist der Erwartungswert λ ?

n = Anzahl Seichen pro Seite

p = Anz. Druckfehler pro Seite

$\lambda = n * p = 3/n * n = 3$

$$\begin{aligned}
 &> p := 3/n; \\
 & \qquad \qquad \qquad p := \frac{3}{n} \qquad (2.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{lambda} := (3/n) * n; \\
 & \qquad \qquad \qquad \lambda := 3 \qquad (2.2)
 \end{aligned}$$

c.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, auf einer Seite keinen / mehr als 4 Druckfehler zu finden?

$$\begin{aligned}
 &> p_X := k \rightarrow (\text{lambda}^k/k!) * \exp(-\text{lambda}); \\
 & \qquad \qquad \qquad p_X := k \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (2.3)
 \end{aligned}$$

Kein Druckfehler:

$$\begin{aligned}
 &> p_X(0); \\
 & \qquad \qquad \qquad e^{-3} \qquad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{evalf}(\%); \\
 & \qquad \qquad \qquad 0.04978706837 \qquad (2.5)
 \end{aligned}$$

Mehr als vier Druckfehler:

$$\begin{aligned}
 &> 1 - (p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) + p_X(4)); \\
 & \qquad \qquad \qquad 1 - \frac{131}{8} e^{-3} \qquad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{evalf}(\%); \\
 & \qquad \qquad \qquad 0.1847367554 \qquad (2.7)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Das Rosinenproblem des Bäckers beim Backen der Drei-Königsbrötchen. Wie viele Rosinen muss man in einem 500gr Teig tun, damit in jedem 50gr Brötchen mit 99%-iger W'keit mindestens eine Rosine ist? Hinweis: Definieren Sie zuerst eine "vernünftige" Zufallsvariable und überlegen Sie sich deren Verteilung.

Lösungsansatz: Wir betrachten zunächst mal den Fall für nur ein Brötchen und nicht für 10. Es gilt also herauszufinden, wie gross die W'keit $P(k=0)$ ist, bei n Rosinen keine Rosine herauszupicken für das eine Brötchen. Da wir ja 10 Brötchen haben, müssen wir 10 mal $P(x=0)$ rechnen. Dann bekommen wir also die W'keit, das bei 10 Brötchen mind. ein Brötchen keine Rosine drinn hat. Dies ist genau der Fall den wir nicht möchten, da wir ja mind. eine Rosine in einem Brötchen haben möchten. Die W'keit muss also kleiner gleich als 1% sein, da somit mit 99%-iger W'keit in jedem Brötchen mind. eine Rosine drinn ist.

Definieren wir genau 1 Brötchen:

$$\begin{aligned} > k := 1; \\ & k := 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

X = "Anzahl Rosinen in einem Brötchen"

p = W'keit das wir das Brötchen ziehen

$$\begin{aligned} > p := 1/10; \\ & p := \frac{1}{10} \end{aligned} \tag{3.2}$$

W'keit, dass wir keine von n Rosinen herauspicken;

$$\begin{aligned} > P_X := n, k \rightarrow \text{binomial}(n, k) * p^k * (1-p)^{n-k}; \\ & P_X := n, k \rightarrow \text{combinat.-binomial}(n, k) p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ausgerechnet gibt $P(X=0) = (9/10)^n$

$$\begin{aligned} > P(X=0) := (9/10)^n; \\ & P(X=0) := \left(\frac{9}{10}\right)^n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nun die W'keit, dass wir für 10 Brötchen mind. eines hätten, welches keine Rosine hat:

$$\begin{aligned} > P10(X=0) := 10 * P(X=0); \\ & P10(X=0) := 10 \left(\frac{9}{10}\right)^n \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die W'keit, dass mind. eines von 10 Brötchen keine Rosine hat muss kleiner gleich 1% sein. Für welches n (Anzahl Rosinen) gilt das:

$$\begin{aligned} > \text{solve}(P10(X=0) = 0.01, n); \\ & 65.56303598 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} > \text{ceil}(\%); \\ & 66 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da es keine halben Rosinen geben kann, nutzen wir die ceiling Funktion. Lösung: mind. 66 Rosinen sind notwendig